

Rund som en cirkel

Inom t.ex. geologin och arkeologin har man ibland behov av att bestämma hur sfäriskt eller runt ett föremål är. Det kan vara fråga om en sten, ett frö eller en metallbit. Föremål med hög och låg sfärisitet visas i figuren intill [1]. Begreppet sfärisitet introducerades och studerades av geologen Hakon Wadell på 1930-talet [2]. I två dimensioner kan detta rundhetsmått tolkas som hur cirkellik ett föremål är.



Cirkeln är perfekt rund, men hur kan man mäta rundheten hos ett godtyckligt föremål? Hur rund är en kvadrat? För att mäta rundheten ρ för tvådimensionella föremål kan man utgå från den dimensionslösa kvoten

$$\rho = 4\pi \cdot \frac{A}{P^2}$$

där A är arean av föremålet och P är föremålets omkrets. Faktorn 4π inkluderas så att rundheten för en cirkel ska bli exakt 1. Alla andra föremål kommer då att ha en rundhet som understiger 1, eftersom givet en viss omkrets P innesluter cirkeln maximal area. Med denna definition blir rundheten liten för avlånga, spretiga, ojämna eller ihåliga figurer.

Vi beräknar rundheten för några enkla geometriska figurer.

Halvcirkel (radie r)



0,33

$$\rho = 4\pi \frac{\frac{1}{2}\pi r^2}{(\pi r + 2r)^2} = \frac{2\pi^2}{(\pi+2)^2} \approx 0,75$$

Ring med yttre radie r och inre radie $\frac{r}{2}$



$$\rho = 4\pi \frac{\pi r^2 - \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\left(2\pi r + 2\pi \frac{r}{2}\right)^2} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

Liksidig triangel (sidlängd a)



$$\rho = 4\pi \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{(3a)^2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9} \approx 0,60$$

Kvadrat (sidlängd a)



$$\rho = 4\pi \frac{a^2}{(4a)^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0,79$$

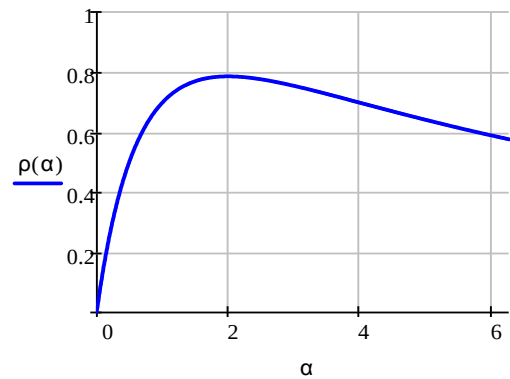
Enligt detta mått är halvcirkeln nästan lika rund som kvadraten. Ringen är däremot betydligt mindre rund (cirkellik) p.g.a. håligheten.

Vilken cirkelsektor är rundast?

Vi studerar en cirkelsektor med radien 1 och medelpunktsvinkeln α radianer. Omkretsen och arean av cirkelsektorn blir $P = 2 + \alpha$ respektive $A = \frac{\alpha}{2}$.

Rundheten för en cirkelsektor med medelpunktsvinkeln α ges då av

$$\rho(\alpha) = 4\pi \frac{A}{P^2} = \frac{2\pi\alpha}{(2 + \alpha)^2}$$



där $0 \leq \alpha < 2\pi$. Rundhetsfunktionen illustreras i grafen intill. Maximistället bestäms t.ex. genom att söka nollstället för derivatan. Maximal rundhet blir $\pi/4 \approx 0,79$ och den antas för medelpunktsvinkeln $\alpha = 2 \text{ rad} \approx 115^\circ$.

Rundhet för regelbundna polygoner

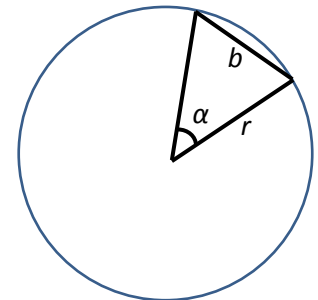
För att beräkna rundheten för en regelbunden polygon med n hörn härleder man allmänna formler för omkrets och area baserat på antalet hörn. Polygonen delas in i n likbenta trianglar med toppvinkeln $\alpha = 2\pi/n$ och benet r .

Basens längd för en triangel: $b = 2r \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Arean för en triangel: $\frac{1}{2}r^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = r^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Omkretsen och arean för n -hörningen blir $P_n = 2nr \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ respektive

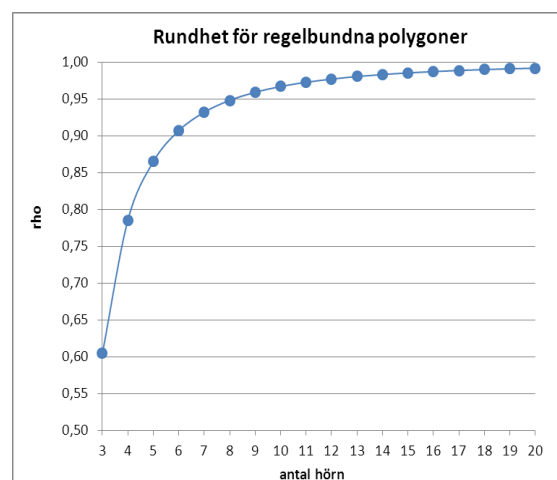
$$A_n = nr^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$



Rundheten ρ_n för en regelbunden n -hörning kan då skrivas som

$$\rho_n = 4\pi \frac{A_n}{P_n^2} = 4\pi \frac{nr^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(2nr \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2} = \frac{\pi \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$\rho_n = \frac{\pi}{n} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right).$$



Tillämpning inom digital bildanalys

Vid undersökning av trädslagen i större skogsbestånd kan flygfotografering med efterföljande bildanalys för klassificering användas [3]. Fotografiet visar granar och tallar snett uppifrån. Uppifrån sett är konturen av en tall relativt rund, medan en grans kontur är betydligt mera spretig. Karikerade bilder av granens och tallen utseende rakt uppifrån ses nedan. På grund av skillnaden i rundhet, kan en automatisk klassificering av trädslagen utföras. Utgående från klassificeringen kan andelen gran och tall i skogsbeståndet uppskattas.



(källa: <http://www.cartinafinland.fi/sv/picture/14639/skog.html>)



tall



gran

I senaste nummer av Nämnaren diskuteras begreppet rundhet på liknande sätt [4]. Om man vill ha mera information kring detta tema kan man bekanta sig med det s.k. *isoperimetriska problemet*. I sådana problemställningar söker man kurvor, figurer eller former som har någon typ av optimal egenskap.

Ray Pörn

Referenser

- [1] <http://en.wikipedia.org/wiki/Sphericity>
- [2] Wadell, Hakon (1935). "Volume, Shape and Roundness of Quartz Particles". *Journal of Geology* 43 (3): 250–280. doi:10.1086/624298
- [3] <http://www.cb.uu.se/~stina/bildSLU/DatBild/egenskap.html>
- [4] <http://ncm.gu.se/namnaren> (nummer 1/2013)