

Att numeriskt tillreda en skinka

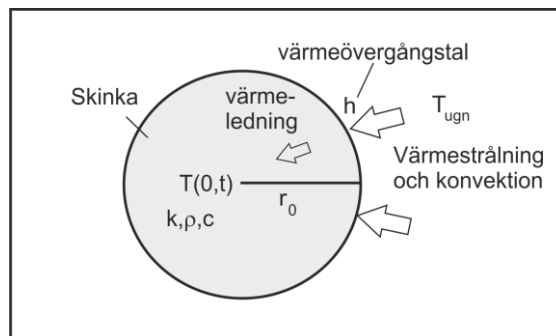
Ekvationen som beskriver värmeledning i ett fast ämnen, är en så kallad partiell differential-
ekvation av formen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

Lösningen till denna ekvation ger temperaturen $T(r, t)$ som funktion av plats och tid. Eftersom vi antar en sfärisk, homogen skinka, så kommer värmeledningsekvationen att anta följande form i sfäriska koordinater

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

där $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ beskriver materialet, dvs. griskött i vårt fall. Värmeledningskonstanten k för griskött är $0,456 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, densiteten ρ tas till vatten (griskött innehåller 72% vatten) och specifika värmekapaciteten c är nästan den för vatten ($3,5 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C}$ enligt tabell). För att lösningen till vår ekvation skall bli unik, måste vi definiera randvillkoren och begynnelsevillkoren. Vi antar att skinkan har samma, konstanta kylskåpstemperatur rakt igenom när vi sätter den i ugnen, dvs. $T(r, 0) = T_{start} = +5^\circ\text{C}$. Randvillkoret vid skinkans yta, dvs. för $r = r_0$, är av kombinerad konvektions och strålningstyp, vilket matematiskt uttrycks som $k \frac{\partial T(r_0, t)}{\partial x} = h(T(r_0, t) - T_{ugn})$. Värmeövergångskonstanten h tas för en vanlig (inte varmlufts) ugn till $10 \text{ W/m}^2\text{C}$ (dåligt känd).



Lösningsmetoden, som först föreslogs av Fourier för att lösa just ett värmeledningsproblem, går ut på att först anta en separabel lösning $T(r, t) = f(r)g(t)$ och därefter uttrycka lösningen i formen av en oändlig s.k. Fourierserie. Inför man dimensionslösa storheter, har lösningen följande form:

$$\left. \begin{aligned} R &= r/r_0 \\ \tau &= \alpha t/r_0^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \theta(R, \tau) = \frac{T(r, t) - T_{start}}{T_{ugn} - T_{start}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 \tau} \frac{\sin(\lambda_n R)}{\lambda_n R}$$

där A_n kallas Fourierkoefficienter och λ_n egenvärden.

Denna lösning är oanvändbar om inte serien konvergerar snabbt. I vårt fall visar det sig att det räcker att ta med endast första termen i serien. Eftersom vi är intresserade av temperaturen i skinkans mitt ($R = 0$), reduceras lösningen till:

$$\theta(0, \tau) = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \rightarrow \frac{T(0, t) - T_{start}}{T_{ugn} - T_{start}} = A_1 e^{-\frac{\alpha \lambda_1^2}{r_0^2} t}$$

Egenvärdet λ_1 är lösning till följande ekvation: $1 - \lambda_1 \cot \lambda_1 = \frac{hr_0}{k}$ och motsvarande Fourierkoefficient ges av

$$A_1 = \frac{4(\sin(\lambda_1) - \lambda_1 \cos(\lambda_1))}{2\lambda_1 - \sin(2\lambda_1)}$$

Vi är nu klara att skriva ner vår lösningsalgoritm:

1. Välj ugnstemperatur T_{ugn} (t.ex. +125°C), skinkans starttemperatur T_{start} (t.ex. +5°C) och skinkans sluttemperatur i mitten $T(0, t)$ (t.ex. +75°C).

2. Skinkans massa m ger skinkans radie: $r_0 = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}}$.

3. Beräkna motsvarande egenvärde λ_1 , genom att lösa $1 - \lambda_1 \cot \lambda_1 = \frac{hr_0}{k}$ (måste göras numeriskt). Egenvärdet ger motsvarande Fourierkoefficient: $A_1 = \frac{4(\sin(\lambda_1) - \lambda_1 \cos(\lambda_1))}{2\lambda_1 - \sin(2\lambda_1)}$

4. Stektiden t kan nu lösas ut:

$$\frac{T(0, t) - T_{start}}{T_{ugn} - T_{start}} = \delta T = A_1 e^{-\frac{\alpha \lambda_1^2}{r_0^2} t} \rightarrow t_{stek} = -\frac{r_0^2}{\lambda_1^2 \alpha} \ln\left(\frac{\delta T}{A_1}\right)$$

Det lämnas som en övning till den intresserade läsaren att se vad som händer om man tar bort några av de gjorda antagandena (elliptisk skinka någon?).

Champangekorkens flykt

När korken sitter längst in i flaskhalsen antar vi att friktionskraften på korken exakt balansera kraften orsakad av trycket Δp , dvs. $F\mu = \text{tryckskillnaden} \times \text{korkens area} = \Delta p \cdot \pi r^2$. När korken rör sig utåt minskar friktionskraften. Vi antar att trycket förblir konstant, men att friktionskraften minskar linjärt med sträckan x som korken rör sig utåt, för att bli noll när korken lämnar halsen, dvs. när $x=l$. Nettokraften $F(x)$ på korken i punkten x är då

$$F(x) = +\Delta p \cdot \pi r^2 - \Delta p \cdot \pi r^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right) = \Delta p \cdot \pi r^2 \left(\frac{x}{l}\right)$$

Arbetet W som utförs på korken av nettokraften blir

$$W = \int_0^l F(x) dx = \int_0^l \Delta p \cdot \pi r^2 \left(\frac{x}{l}\right) dx = \frac{1}{2} \Delta p \cdot \pi r^2 \cdot l.$$

Arbete-energiprincipen säger detta arbete är lika med förändringen i korkens kinetiska energi, ur vilken korkens hastighet v när den lämnar halsen fås

$$\frac{1}{2}mv^2 = W \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\Delta p \cdot \pi r^2 \cdot l \rightarrow v = \sqrt{\frac{\Delta p \cdot \pi r^2 \cdot l}{m}}$$

Med de värden som finns givna i uppgiften blir $v = 20 \text{ m/s}$ (70 km/h). Skjuter vi iväg korken i en vinkel på 45 grader från marken, så kastparablen en räckvidd på 40 m för korken (om luftmotståndet försummas).