

Arcusfunktioner i aktion

Vi ska studera två problemställningar som leder till uttryck innehållande en arcusfunktion. De två problemen är likartade; det första är en rent geometrisk problemställning medan det senare är en mera praktisk tillämpning. För att modellera, lösa och analysera problemen används derivata, integral, ekvationslösning och approximation. Några formler från analysen som vi behöver är

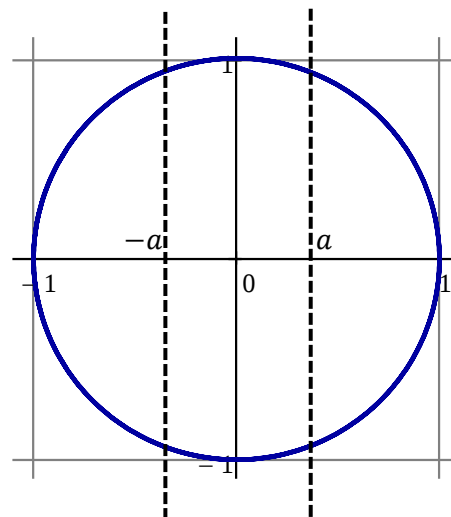
$$(1) \quad D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

$$(2) \quad \int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + C, \quad -1 \leq x \leq 1$$

Integreringsregel (2) kan verifieras via derivering bägge led.

Cirkelns tredelning

Att dela en cirkel i tre delar så att delarnas areor är lika kan t.ex. göras genom att dela cirkeln i tre identiska sektorer vardera med medelpunktsvinkeln 120° . Men hur gör man om delningen ska utföras med hjälp av två parallella linjer? Se illustrationen i figuren intill. Vi utgår från enhetscirkeln med arean π och frågan är på vilka positioner a och $-a$ som de vertikala linjerna ska placeras för att de tre delarna ska bli lika stora. Kravet blir då att mittenbiten (området som avgränsas av de streckade linjerna och cirkeln) ska ha arean $\frac{\pi}{3}$. Utgående från ekvationen för enhetscirkeln bildar man funktionen $\sqrt{1-x^2}$ som får representera den övre cirkelhalvan. Detta leder till ekvationen



$$\frac{\pi}{3} = 2 \int_{-a}^a \sqrt{1-x^2} dx = 4 \int_0^a \sqrt{1-x^2} dx = 2 \left(a\sqrt{1-a^2} + \arcsin a \right)$$

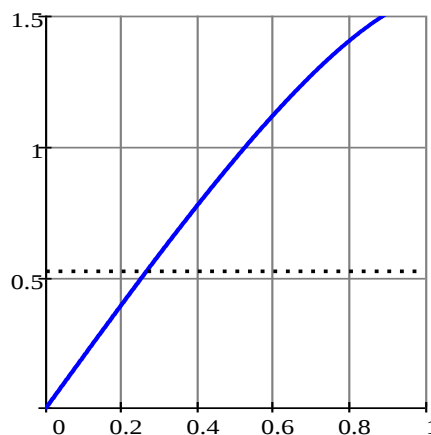
vilket är samma som

$$a\sqrt{1-a^2} + \arcsin a = \frac{\pi}{6}$$

där $a \in [0, 1]$. Denna ekvation kan enbart lösas numeriskt och lösningen är $a \approx 0,264932$. De vertikala linjerna $x = -0,265$ och $x = 0,265$ delar alltså enhetscirkeln i tre lika stora delar.

I figuren intill representerar den svarta streckade linjen konstanten $\frac{\pi}{6}$ och den blåa kurvan vänsterledet i ekvationen. Som

synes är funktionen $f(x) = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$ väldigt linjär i intervallet $[0, 0,5]$ så om vi beräknar tangenten i punkten $x = 0$ erhåller vi en ganska bra linjär approximation.



Derivatan av $f(x)$ blir

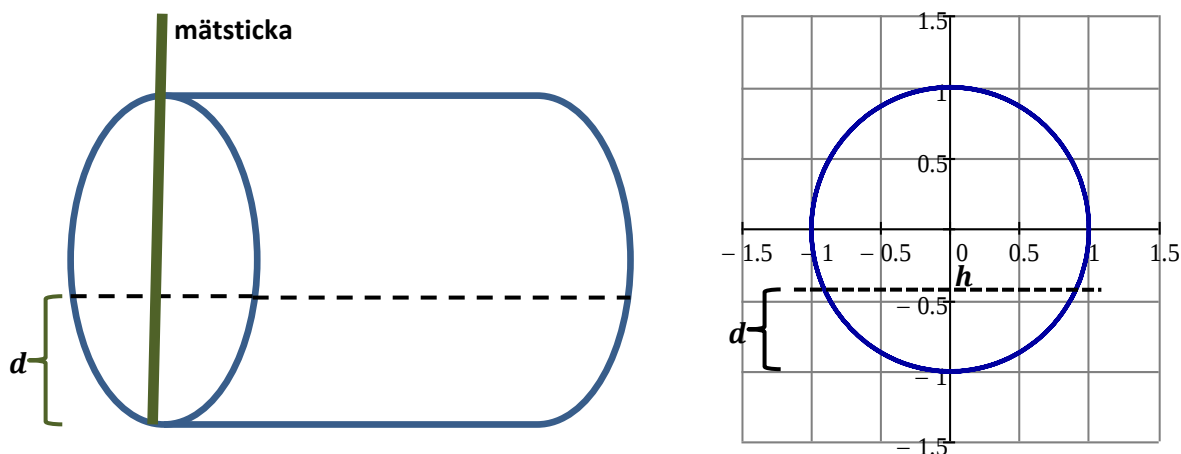
$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} - x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1-x^2}$$

vilket ger en riktningskoefficient på $f'(0) = 2$ i origo. Den linjära approximationen är således $l(x) = 2x$. Om den linjäriserade ekvationen $2x = \frac{\pi}{6}$ löses fås resultatet $x = \frac{\pi}{12} \approx 0.2618$ och avvikelsen till den numeriska lösningen är enbart ca 0,003. Linjärisering fungerar i detta exempel utmärkt för att finna en noggrann approximativ lösning till en icke-linjär ekvation som inte kan lösas exakt.

Modell för en mätsticka

En variation på temat i föregående uppgift är att skapa en matematisk modell av en vätskemätare för en liggande cylindrisk tank. Vi utgår från en tank med basradien $r = 1$ m och längden L m. Givet vätskedjupet $d \in [0, 2]$ ska fyllnadsgraden för tanken beräknas. Fyllnadsgraden f definieras som

$$f = 100\% \cdot \frac{\text{vätskans volym}}{\text{tankens volym}}.$$



Vi tänker oss att x -axeln är vertikal i grafen ovan. Om vi känner vätskehöjdens position $h = d - 1 \in [-1, 1]$ kan vätskans tvärsnittsarea beräknas enligt

$$A(h) = 2 \int_{-1}^h \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} + h\sqrt{1-h^2} + \arcsin h$$

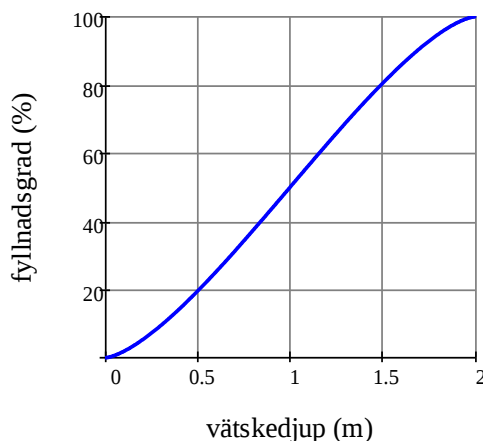
Om tvärsnittsarean ges av $A(h)$ är volymen $L \cdot A(h)$. Totala volymen för tanken är $\pi r^2 L = \pi L$ vilket ger fyllnadsgraden

$$f(d) = 100 \cdot \frac{\frac{\pi}{2} + (d-1)\sqrt{2d-d^2} + \arcsin(d-1)}{\pi}$$

där h ersatts med $d - 1$. Om vi känner vätskedjupet d kan fyllnadsgraden nu beräknas genom att evaluera $f(d)$. En graf av tankens fyllnadsgrad $f(d)$ ses nedan.

Precis som i föregående uppgift är fyllnadsgraden ganska linjär, speciellt för $d \in [0,5, 1,5]$.

Hur stort fel gör man maximalt om man approximerar funktionen f med en linjär approximation? Utifrån figuren intill kan man konstruera en linjär approximation, t.ex. genom att interpolera punkterna $(0,0)$ och $(2,100)$, vilket ger funktionen $l(d) = 50d$ eller $l(h) = 50 + 50h$. Vi noterar också att



funktionen $f(d)$ är konvex i $[0, 1]$ och konkav i $[1, 2]$. I intervallet $[0, 1]$ är alltså $l(d)$ en överskattning av $f(d)$ och i intervallet $[1, 2]$ är den en underskattning. Motsvarande intervall för vätskehöjden h är $[-1, 0]$ respektive $[0, 1]$. Då felet analyseras utgår man från funktionen

$$f(h) = \frac{100}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + h\sqrt{1-h^2} + \arcsin h \right)$$

och intervallet $[-1, 1]$. P.g.a. symmetrin kan man maximera differensen

$$e(h) = f(h) - l(h) = \frac{100}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + h\sqrt{1-h^2} + \arcsin h \right) - 50 - 50h$$

över intervallet $[0, 1]$. Derivatan blir

$$e'(h) = \frac{100}{\pi} \left(\sqrt{1-h^2} - \frac{h^2}{\sqrt{1-h^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-h^2}} \right) - 50 = \frac{100}{\pi} \left(\sqrt{1-h^2} - \frac{h^2-1}{\sqrt{1-h^2}} - \frac{\pi}{2} \right)$$

För att bestämma derivatans nollställen görs uttrycket inom parantes liknämngt och täljaren nollställs.

$$1 - h^2 - h^2 + 1 - \frac{\pi}{2}\sqrt{1-h^2} = 0$$

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{1-h^2} = 2 - 2h^2$$

$$\frac{\pi^2}{4}(1-h^2) = (2-2h^2)^2$$

$$(1-h^2)(16(1-h^2) - \pi^2) = 0$$

$$h = \pm 1 \vee h = \pm \frac{\sqrt{16-\pi^2}}{4}$$

Enbart lösningen $h^* = \frac{\sqrt{16-\pi^2}}{4} \approx 0,619$ tillhör det inre av intervallet $[0, 1]$ så det maximala felet uppträder för detta h -värde eftersom $e(0) = e(1) = 0$. Maximala felet är då $e(h^*) \approx e(0,619) \approx 5,8$.

Slutsats: Det största absoluta felet som görs vid denna approximation är ca 6 % (enheter) och det antas för ett h -värde på ca 0,62 vilket motsvarar ett våtskedjup på 1,62 m. Den exakta fyllnadsgraden vid detta våtskedjup är 87 % och den approximativa är 81 %. Det negativa h -värdet $-0,62$ motsvarar ett våtskedjup på 0,38 m och där är också felet 6 %, men i motsatt riktning.